BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2008***

ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ НА СЕЧЕНИЯХ В ТЕНЗОРНОМ РАССЛОЕНИИ ТИПА (2,0)

Г.Д.ФАТТАЕВ
Бакинский Государственный Университет

В работе рассматривается тензорное расслоение типа $(2,0)$ дифференцируемого многообразия, определяются (B,C) -репер и соответствующий корепер вдоль сечения этого расслоения. Вычисляются компоненты полного и горизонтального лифтов векторного поля, заданного на базовом многообразии, в тензорное расслоение типа $(2,0)$ вдоль сечения относительно (B,C)-репера. Определяется чистое относительно аффинорной структуры φ, заданной на базовом многообразии, сечение, находятся ненулевые компоненты полного лифта аффинорной структуры φ в тензорное расслоение типа $(2,0)$ вдоль чистого сечения относительно (B,C)-репера.

Введение. Различные вопросы теории лифтов тензорных полей и аффинных связностей в тензорных расслоениях рассмотрены А.А.Салимовым и автором (см., напр., [1], [2], [3]). Тензорное поле типа $(2,0)$, заданное на $n-$мерном дифференцируемом многообразии M, определяет сечение в расслоении $T_0^2(M)$ контравариантных тензоров типа $(2,0)$, которое является n^2-мерным подмногообразием в $n+n^2-$мерном тензорном расслоении $T_0^2(M)$.

Основной целью настоящей работы является изучение лифтов векторных полей и аффиноров из многообразия M в тензорное расслоение $T_0^2(M)$ на сечении этого расслоения.

В § 1 определяется тензорное расслоение $T_0^2(M)$ типа $(2,0)$ дифференцируемого многообразия M, приводятся формулы для компонентов полного и горизонтального лифтов векторного поля из M в $T_0^2(M)$, полученные в работах [2], [4]. В § 2 изучаются полный и горизонтальный лифты векторного поля на сечении расслоения $T_0^2(M)$. В § 3 приводятся формулы для ненулевых компонентов полного лифта аффинорного поля из M в $T_0^2(M)$, полученные в работе [4], находятся ненулевые компоненты этого лифта, в так называемом $(B,C)-$репере вдоль чистого сечения расслоения $T_0^2(M)$.

Многообразие, векторные и тензорные поля, аффинные связности на этом многообразии, которые будут рассмотрены, считаются из класса C^{∞}.

Индексы $A, B, C, D,...$ принимают значения от 1 до $n+n^2$, индексы $i, j, k, l,...$ -от 1 до n, а индексы $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \bar{l},...$ -от $n+1$ до $n+n^2$. Будем употреблять обозначения $x^I = \left(x^i, x^{\bar{i}}\right)$ и $x^{\bar{i}} = t^{i_1 i_2}$.

§ 1. Полный и горизонтальный лифты векторных полей. Пусть M - $n-$мерное дифференцируемое многообразие класса C^∞, $T_0^2(M)$- тензорное расслоение типа $(2,0)$ над этим многообразием, $\pi : T_0^2(M) \to M$ - проекция расслоения. Рассмотрим систему локальных координат x^i в окрестности U точки $P \in M$. Тогда тензор t типа $(2,0)$ в точке P, являющийся элементом из $T_0^2(M)$, локально выражается в виде $\left(x^i, t^{i_1 i_2}\right) = \left(x^i, x^{\bar{i}}\right)$, где $t^{i_1 i_2}$ - компоненты тензора t относительно натурального репера $\{\partial_i\}$. Следовательно, в окрестности $\pi^{-1}(U)$ расслоения $T_0^2(M)$ вводятся локальные координаты $\left(x^i, x^{\bar{i}}\right)$. Преобразованию $x^{i'} = x^{i'}\left(x^i\right)$ локальных координат многообразия M соответствует следующее преобразование локальных координат в расслоении $T_0^2(M)$:

$$\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}\left(x^i\right), \\ t^{i'_1 i'_2} = A_{i_1}^{i'_1} A_{i_2}^{i'_2} t^{i_1 i_2}, \end{cases} \tag{1}$$

здесь $A_{i_1}^{i'_1} = \dfrac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}$, $A_{i_2}^{i'_2} = \dfrac{\partial x^{i'_2}}{\partial x^{i_2}}$.

Обозначением $x^{\bar{i}} = t^{i_1 i_2}$ преобразование (1) приводится к форме:

$$x^{I'} = x^{I'}\left(x^1, ..., x^n, x^{n+1}, ..., x^{n+n^2}\right).$$

Якобиева матрица преобразования (1) имеет строение:

$$\left(\frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} & \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\bar{i}}} \\ \dfrac{\partial x^{\bar{i}'}}{\partial x^i} & \dfrac{\partial x^{\bar{i}'}}{\partial x^{\bar{i}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i^{i'} & 0 \\ t^{k_1 k_2} \partial_i A_{k_1}^{i'_1} A_{k_2}^{i'_2} & A_{i_1}^{i'_1} A_{i_2}^{i'_2} \end{pmatrix}.$$

Пусть V - векторное поле на многообразии M и v^i - его компоненты в координатной окрестности $U\left(x^i\right) \subset M$. Полным лифтом векторного поля V в расслоение $T_0^2(M)$ называется векторное поле ${}^cV$ на расслоении $T_0^2(M)$ с компонентами ${}^cV^I$

$$\begin{cases} {}^cV^i = v^i, \\ {}^cV^{\bar{i}} = t^{m i_2} \partial_m v^{i_1} + t^{i_1 m} \partial_m v^{i_2} \end{cases} \tag{2}$$

в координатной окрестности $\pi^{-1}(U)\left(x^i, x^{\bar{i}}\right) \subset T_0^2(M)$ (см. [2]).

Предположим, что на многообразии M задана аффинная связность ∇ с коэффициентами Γ_{ij}^k. Горизонтальным лифтом векторного поля V в расслоение $T_0^2(M)$ называется векторное поле ${}^H V$ на расслоении $T_0^2(M)$ с компонентами ${}^H V^I$

$$\begin{cases} {}^H V^i = v^i, \\ {}^H V^{\bar{i}} = -\Gamma_{ms}^{i_1} t^{s i_2} v^m - \Gamma_{ms}^{i_2} t^{i_1 s} v^m \end{cases} \tag{3}$$

в координатной окрестности $\pi^{-1}(U)\left(x^i, x^{\bar{i}}\right) \subset T_0^2(M)$ (см. [4]).

§ 2. Лифты векторных полей на сечении. Пусть ξ - тензорное поле типа $(2,0)$, заданное на многообразии M. Тогда соответствие $P \mapsto \xi_P$ определяет отображение $\sigma_\xi : M \to T_0^2(M)$ такое, что $\pi \circ \sigma_\xi = id_M$, здесь ξ_P- значение ξ в точке $P \in M$. $n-$мерное подмногообразие $\sigma_\xi(M)$ расслоения $T_0^2(M)$ называется сечением, определяемым ξ. Если тензорное поле ξ имеет компоненты $\xi^{h_1 h_2}\left(x^h\right)$, то сечение $\sigma_\xi(M)$ локально представляется в виде:

$$\begin{cases} x^h = x^h, \\ x^{\bar{h}} = \xi^{h_1 h_2}\left(x^h\right). \end{cases} \tag{4}$$

Дифференцируя (4) по x^i, мы получим n касательных векторов B_i к сечению $\sigma_\xi(M)$, которые имеют компоненты

$$\left(B_i^H\right) = \left(\frac{\partial x^H}{\partial x^i}\right) = \begin{pmatrix} \delta_i^h \\ \partial_i \xi^{h_1 h_2} \end{pmatrix} \tag{5}$$

относительно натурального репера $\{\partial_h, \partial_{\bar{h}}\}$ в расслоении $T_0^2(M)$, здесь $\delta_i^h -$ символы Кронекера.

С другой стороны, слой расслоения $T_0^2(M)$ локально представляется в виде

$$\begin{cases} x^h = const, \\ t^{h_1 h_2} = t^{h_1 h_2}, \end{cases} \tag{6}$$

здесь $t^{h_1 h_2}$ рассматриваются как параметры.

Аналогичным образом, дифференцируя (6) по $x^{\bar{i}} = t^{i_1 i_2}$, мы получим n^2 касательных к слою векторов $C_{\bar{i}}$, которые имеют компоненты

$$\left(C_{\bar{i}}^{H}\right)=\left(\frac{\partial x^{H}}{\partial x^{\bar{i}}}\right)=\begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{i_1}^{h_1}\delta_{i_2}^{h_2} \end{pmatrix} \tag{7}$$

относительно натурального репера $\{\partial_h, \partial_{\bar{h}}\}$ в расслоении $T_0^2(M)$.

Векторы B_i^H и $C_{\bar{i}}^H$ линейно независимы и вдоль сечения $\sigma_\xi(M)$ образуют репер $\{B_i, C_{\bar{i}}\}$. Этот репер назовем $(B,C)-$репером вдоль сечения $\sigma_\xi(M)$.

Из разложений
$$ {}^cV={}^cV^h\partial_h+{}^cV^{\bar{h}}\partial_{\bar{h}}, $$
$$ {}^cV=\tilde{V}^iB_i+\tilde{V}^{\bar{i}}C_{\bar{i}} \tag{8}$$

получим:

$$ {}^cV^h=\tilde{V}^iB_i^h+\tilde{V}^{\bar{i}}C_{\bar{i}}^h, $$
$$ {}^cV^{\bar{h}}=\tilde{V}^iB_i^{\bar{h}}+\tilde{V}^{\bar{i}}C_{\bar{i}}^{\bar{h}}. $$

Учитывая формулы (2) для сечения $\sigma_\xi(M)$, также (5) и (7), приходим к следующему:

$$ \tilde{V}^i={}^cV^i=v^i, \quad \tilde{V}^{\bar{i}}=-L_V\xi^{i_1i_2}, $$

здесь L_V – производная Ли вдоль векторного поля V (см. [5, стр. 196]).

Таким образом, полный лифт ${}^cV$ векторного поля V из M в расслоение $T_0^2(M)$, имеющий в натуральном репере $\{\partial_i, \partial_{\bar{i}}\}$ компоненты (2), вдоль сечения $\sigma_\xi(M)$ относительно $(B,C)-$ репера имеет компоненты:

$$ {}^cV=\begin{pmatrix} \tilde{V}^i \\ \tilde{V}^{\bar{i}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v^i \\ -L_V\xi^{i_1i_2} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Из разложения (8) и (9) следует:

Теорема 1. *Полный лифт* ${}^cV$ *векторного поля* V *из* M *в расслоение* $T_0^2(M)$ *является касательным к сечению* $\sigma_\xi(M)$ *тогда и только тогда, когда в многообразии* M $L_V\xi^{i_1i_2}=0$.

Заметим, что аналог теоремы 1 в случае кокасательного расслоения доказан в работе [7] К. Яно.

Рассмотрим разложения векторного поля ${}^HV$ по реперам $\{\partial_i, \partial_{\bar{i}}\}$ и $\{B_i, C_{\bar{i}}\}$:

$$ {}^HV={}^HV^h\partial_h+{}^HV^{\bar{h}}\partial_{\bar{h}}, $$
$$ {}^HV=\bar{V}^iB_i+\bar{V}^{\bar{i}}C_{\bar{i}}. $$

Из этих разложений следует:

$$ {}^HV^h=\bar{V}^iB_i^h+\bar{V}^{\bar{i}}C_{\bar{i}}^h, $$

$$^{H}V^{\bar{h}}=\bar{V}^{i}B_{i}^{\bar{h}}+\bar{V}^{\bar{i}}C_{\bar{i}}^{\bar{h}}.$$

Пользуясь формулой (3) для сечения $\sigma_{\xi}(M)$, также (5) и (7), получим:

$$\bar{V}^{i}={}^{H}V^{i}=v^{i},\quad \bar{V}^{\bar{i}}=-\nabla_{V}\xi^{i_1 i_2},$$

здесь ∇_V – ковариантная производная вдоль векторного поля V в аффинной связности ∇ (см. [5, стр. 264]).

Следовательно, горизонтальный лифт ^{H}V векторного поля V из M в расслоение $T_0^2(M)$, имеющий в натуральном репере $\{\partial_i,\partial_{\bar{i}}\}$ компоненты (3), вдоль сечения $\sigma_{\xi}(M)$ относительно (B,C)– репера имеет компоненты

$$^{H}V=\begin{pmatrix}\bar{V}^{i}\\ \bar{V}^{\bar{i}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v^{i}\\ -\nabla_{V}\xi^{i_1 i_2}\end{pmatrix},$$

тем самым справедлива

Теорема 2. *Горизонтальный лифт* ^{H}V *векторного поля* V *из* M *в расслоение* $T_0^2(M)$ *является касательным к сечению* $\sigma_{\xi}(M)$ *тогда и только тогда, когда в многообразии* M *тензорное поле* $\xi^{i_1 i_2}$ *ковариантно постоянное вдоль векторного поля* V *в аффинной связности* ∇, *т.е.* $\nabla_V\xi^{i_1 i_2}=0$.

§3. Полный лифт аффинорных полей на сечении. Пусть на многообразии M задано аффинорное поле φ. Тензорное поле ξ типа $(2,0)$ называется чистым относительно аффинорного поля φ, если

$$\varphi_m^{i_1}\xi^{m i_2}=\varphi_m^{i_2}\xi^{i_1 m}.$$

Сечение $\sigma_{\xi}(M)$ называется чистым относительно аффинорного поля φ и обозначается через $\sigma_{\xi}^{\varphi}(M)$, если ξ является чистым относительно φ.

Полным лифтом аффинорного поля φ из многообразия M в тензорное расслоение $T_0^2(M)$ вдоль чистого подрасслоения $t_0^2(M)$ называется аффинорное поле $^{c}\varphi$ с ненулевыми компонентами:

$$\begin{aligned}&{}^{c}\varphi_k^{i}=\varphi_k^{i},\\&{}^{c}\varphi_k^{\bar{i}}=t^{m i_2}\partial_m\varphi_k^{i_1}-\partial_k\varphi_m^{i_1}t^{m i_2}+\partial_m\varphi_k^{i_2}t^{i_1 m},\\&{}^{c}\varphi_{\bar{k}}^{\bar{i}}=\varphi_{k_1}^{i_1}\delta_{k_2}^{i_2}\end{aligned}\qquad(10)$$

относительно натурального репера $\{\partial_i,\partial_{\bar{i}}\}$ в координатной окрестности $\pi^{-1}(U)\cap t_0^2(M)$ (см. [4]).

Имеет место

Теорема 3. *Полный лифт* ${}^{C}\varphi$, *имеющий ненулевые компоненты (10) в натуральном репере* $\{\partial_i, \partial_{\bar{i}}\}$, *вдоль чистого сечения* $\sigma_\xi^\varphi(M)$ *относительно* $(B, C)-$ *репера имеет следующие ненулевые компоненты:*

$$ {}^{c}\widetilde{\varphi}_k^i = \varphi_k^i, \qquad {}^{c}\widetilde{\varphi}_k^{\bar{i}} = -(\Phi_\varphi \xi)_k^{i_1 i_2}, \qquad {}^{c}\widetilde{\varphi}_{\bar{k}}^{\bar{i}} = \varphi_{k_1}^{i_1} \delta_{k_2}^{i_2}, \tag{11} $$

здесь $\Phi_\varphi \xi$ *– оператор Татибаны* (см. [6]).

Доказательство. Дуальный корепер репера $E_I^A = \left(B_i^A, C_{\bar{i}}^A\right)$ обозначим через $\widetilde{E}_A^J = \left(\widetilde{B}_A^j, \widetilde{C}_A^{\bar{j}}\right)$ и определим соотношением

$$ E_I^A \widetilde{E}_A^J = \delta_I^J. \tag{12} $$

При помощи (5) и (7) из соотношения (12) получим, что ковекторные поля $\widetilde{E}_A^J$ относительно натурального корепера $\{dx^a, dx^{\bar{a}}\}$ имеют компоненты:

$$ \begin{aligned} \widetilde{E}_A^j &= \left(B_a^j, B_{\bar{a}}^j\right) = \left(\delta_a^j, 0\right), \\ \widetilde{E}_A^{\bar{j}} &= \left(\widetilde{C}_a^{\bar{j}}, \widetilde{C}_{\bar{a}}^{\bar{j}}\right) = \left(-\partial_a \xi^{j_1 j_2}, \delta_{a_1}^{j_1} \delta_{a_2}^{j_2}\right). \end{aligned} \tag{13} $$

Аффинорное поле ${}^{c}\varphi$ с компонентами (11) в натуральном репере $\{\partial_i, \partial_{\bar{i}}\}$ разложим по $(B, C)-$ реперу вдоль чистого сечения $\sigma_\xi^\varphi(M)$:

$$ {}^{c}\varphi_B^A = {}^{c}\widetilde{\varphi}_J^I E_I^A \widetilde{E}_B^J. \tag{14} $$

Учитывая формулы (10) для чистого сечения $\sigma_\xi^\varphi(M)$, также (5), (7) и (12), из разложения (14) получим:

1) $A = a, B = b,$ при этом

$$ \varphi_b^a = {}^{c}\widetilde{\varphi}_j^i \delta_i^a \delta_b^j + {}^{c}\widetilde{\varphi}_{\bar{j}}^i \delta_i^a \left(-\partial_b \xi^{j_1 j_2}\right). \tag{15} $$

2) $A = a, B = \bar{b},$ при этом

$$ {}^{c}\varphi_{\bar{b}}^a = 0 = {}^{c}\widetilde{\varphi}_{\bar{j}}^i E_i^a \widetilde{E}_{\bar{b}}^{\bar{j}} = {}^{c}\widetilde{\varphi}_{\bar{j}}^i \delta_i^a \delta_{b_1}^{j_1} \delta_{b_2}^{j_2}, $$

откуда следует, что

$$ {}^{c}\widetilde{\varphi}_{\bar{j}}^i = 0. \tag{16} $$

Основываясь на соотношение (16), из (15) получим:

$$ {}^{c}\widetilde{\varphi}_j^i = \varphi_j^i. $$

3) $A = \bar{a}, B = \bar{b},$ при этом (14) примет вид:

$$ \varphi_{b_1}^{a_1} \delta_{b_2}^{a_2} = {}^{c}\widetilde{\varphi}_{\bar{j}}^{\bar{i}} \delta_{i_1}^{a_1} \delta_{i_2}^{a_2} \delta_{b_1}^{j_1} \delta_{b_2}^{j_2}, $$

следовательно,

$$ {}^{c}\widetilde{\varphi}_{\bar{j}}^{\bar{i}} = \varphi_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2}. $$

4) $A = \bar{a}, B = b,$ при этом

$$ \xi^{m a_2} \partial_m \varphi_b^{a_1} - \partial_b \varphi_m^{a_1} \xi^{m a_2} + \partial_m \varphi_b^{a_2} \xi^{a_1 m} = $$

$$=\varphi_j^i \partial_i \xi^{a_1 a_2} \delta_b^j + {}^c\tilde{\varphi}_j^{\bar{i}} \delta_{i_1}^{a_1} \delta_{i_2}^{a_2} \delta_b^j + \varphi_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} \delta_{i_1}^{a_1} \delta_{i_2}^{a_2} \left(-\partial_b \xi^{j_1 j_2}\right)$$

или

$$\begin{aligned} {}^c\tilde{\varphi}_j^{\bar{i}} \delta_{i_1}^{a_1} \delta_{i_2}^{a_2} \delta_b^j &= \xi^{m a_2} \partial_m \varphi_b^{a_1} - \partial_b \varphi_m^{a_1} \xi^{m a_2} + \partial_m \varphi_b^{a_2} \xi^{a_1 m} - \\ &- \varphi_b^m \partial_m \xi^{a_1 a_2} + \varphi_m^{a_1} \partial_b \xi^{m a_2} = \delta_{i_1}^{a_1} \delta_{i_2}^{a_2} \delta_b^j \left(\xi^{m i_2} \partial_m \varphi_j^{i_1} - \right. \\ &\left. - \partial_j \varphi_m^{i_1} \xi^{m i_2} + \partial_m \varphi_j^{i_2} \xi^{i_1 m} - \varphi_j^m \partial_m \xi^{i_1 i_2} + \varphi_m^{i_1} \partial_j \xi^{m i_2} \right), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} {}^c\tilde{\varphi}_j^{\bar{i}} &= \xi^{m i_2} \partial_m \varphi_j^{i_1} - \partial_j \varphi_m^{i_1} \xi^{m i_2} + \partial_m \varphi_j^{i_2} \xi^{i_1 m} - \varphi_j^m \partial_m \xi^{i_1 i_2} + \\ &+ \varphi_m^{i_1} \partial_j \xi^{m i_2} = -\left(\Phi_\varphi \xi\right)_j^{i_1 i_2}, \end{aligned}$$

где $\Phi_\varphi \xi$ – оператор Татибаны, применяемый к чистому тензорному полю $\xi^{i_1 i_2}$. Тем самым теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Салимов А.А., Фаттаев Г.Д. Обобщенный оператор Яно-Ако и новый метод о лифтах тензорных полей// Сб. докл. межд. научн.-техн. конф. «Актуальные пробл. фунд. наук». Том 2.-Москва: 1991, с.63-65.
2. Салимов А.А., Фаттаев Г.Д. Полный лифт векторного поля в чистое тензорное подрасслоение. Баку: 1990.-18 с.-Деп. в АзНИИНТИ 07.05.90. № 1489-Аз. 90.
3. Фаттаев Г.Д. Лифты аффинной связности в расслоение контравариантных тензоров типа (2,0).Журнал Унив-та Кавказ, сер. Естест. и Техн., № 19, 2007, с.116-119.
4. Салимов А.А., Фаттаев Г.Д. Обобщенный оператор Яно-Ако и лифты тензорных полей. Вестник Бакинск. Унив-та, сер.физ.-мат. наук, 1996, №1, с.142-151.
5. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: 1979, 760 с.
6. Салимов А.А. Φ -оператор и почти аналитичность // Дифф. геом./Саратов. ун.-т, 1983, №7, с.73-80.
7. Yano K. Tensor fields and connections on cross-sections in the cotangent bundle. Tohoku Math. Journ., 1967,Vol. 19, № 1, pp.32-48.

$(2,0)$ TİPLİ TENZOR LAYLANMASINDA KƏSİKLƏR ÜZƏRİNDƏ TENZOR MEYDANLARI

H.D.FƏTTAYEV

XÜLASƏ

İşdə diferensiallanan çoxobrazlının $(2,0)$ tipli tenzor laylanmasına baxılır, bu laylanmanın kəsiyi boyunca (B,C)-reper və uyğun koreper təyin olunur. Bazada verilən vektor meydanının $(2,0)$ tipli tenzor laylanmasına tam və horizontal liftlərinin kəsik boyunca (B,C)-reperə nəzərən komponentləri hesablanır. Bazada verilən φ afinor strukturuna nəzərən təmiz kəsik təyin olunur, φ

afinor strukturunun $(2,0)$ tipli tenzor laylanmasına tam liftinin təmiz kəsik boyunca (B,C)-reperə nəzərən komponentləri tapılır.

TENSOR FIELDS ON CROSS-SECTIONS IN THE TENSOR BUNDLE OF THE TYPE $(2,0)$

H.D.FATTAYEV

SUMMARY

In this article the tensor bundle of the type $(2,0)$ of the differentiable manifold is considered, the frame (B,C) and corresponding coframe along cross-section of this bundle are defined. The components of the complete and horizontal lifts of vector field given on the base manifold to tensor bundle of the type $(2,0)$ along the cross-section with respect to the frame (B,C) are calculated. A pure cross-section with respect to the affinor structure φ given on the base manifold are defined, the non zero components of the complete lift of affinor structure φ to tensor bundle of the type $(2,0)$ along the pure cross-section with respect to the frame (B,C) are obtained.